Contrôle Continu - Architecture des Ordinateurs

Vendredi 1er Avril 2011
Documents de cours autorisés. Calculatrices interdites.
Durée 1h25

Tous les résultats doivent être justifiés.

1 Représentations des entiers

1. Convertissez en hexadécimal les entiers suivants : $48_{10}, 62_{10}, 221_{10}$.

> **Solution:**
> $48 = 16 * 3 = 30_{16}$
> $62 = 32 + 16 + 14 = 3 * 16 + 14 = 3E_{16}$
> $221 = 128 + 64 + 16 + 13 = (8 + 4 + 1) * 16 + 13 = DD_{16}$

2. Représentez les entiers suivants au format binaire en complément à 2 sur 8 bits : $33_{10}, -20_{10}, 74_{10}, -63_{10}$.

> **Solution:**
> $33 = 00100001_2$
> $20 = 00010100_2$ donc $-20 = \overline{00010100} + 1 = 11101011 + 1 = 11101100_{CA2}$
> $74 = 01001010_2$
> $63 = 64 - 1 = 00111111_2$ donc $-63 = 11000000 + 1 = 11000001_{CA2}$

3. En utilisant les résultats de la question précédente, effectuez en complément à 2 sur 8 bits l'opération suivante : $-63 - 20$. Donnez le résultat en complément à 2.

> **Solution:**

```
 11000001
+11101100
---------
110101101   Résultat = 10101101 = -83
```

2 Codes

On souhaite transmettre sur un canal un mot de 8 bits $A = a_7a_6 \dots a_1a_0$. On utilise le code C suivant pour la transmission : $C(A) = AA = a_7a_6 \dots a_1a_0a_7a_6 \dots a_1a_0$. Par exemple $C(10001101) = 1000110110001101$.

1. Quelle est la distance de Hamming $d(C(240), C(170))$ entre $C(11110000)$ et $C(10101010)$?

Solution: 11110000 et 10101010 ont 4 bits de différence donc $C(11110000)$ et $C(10101010)$ ont 8 bits de différence. La distance de Hamming entre eux est de 8.

2. Quelle est la distance de Hamming du code C ? Pour rappel

$$d_h(C) = min\{d(C(M), C(N))|\forall M \neq N\}$$

Solution: Soit deux mots différents de 8 bits M et N. $d(C(M), C(N)) = 2 \times d(M, N)$. La distance minimale entre M et N est 1 donc $d_h(C) = min\{d(C(M), C(N))|\forall M \neq N\} = min\{2.d(M, N)|\forall M \neq N\} = 2$.

3 Nombres flottants

On représentera les réels sur 16 bits selon la norme suivante (demi précision) :

S (Signe)	E (Exposant)	P (Pseudomantisse)
1 bit	5 bits	10 bits

1. Représentez en demi-précision les réels suivants (on utilisera l'arrondi au plus près si nécessaire) :
   3
   0.8
   -0.625

Solution: $3 = 0 \quad 10000 \quad 1000000000$
- Signe : positif.
- $3 = 11_2 = 1,1.2^1$
- Pseudo-mantisse : 10000...
- Exposant : $15 + 1 = 16 = 10000$

$0.8 = 0 \quad 01110 \quad 1001100110$
- Signe : positif.
- Par multiplication par 2 successive :
```
.8 * 2 = 1.6   1
.6 * 2 = 1.2   1
.2 * 2 = 0.4   0
.4 * 2 = 0.8   0
               ...
```
  $0.8 = 0.11001100\cdots = 2^{-1} \times 1.10011001100\ldots$
- Pseudo-mantisse : 10011001100
- Exposant : $15 - 1 = 14 = 01110$

$-0.625 = 1 \quad 01110 \quad 0100000000$
- Signe : négatif.
- $0.625 = 0.5 + 0.125 = 0.101 = 1.01 \times 2^{-1}$
- Pseudo-mantisse : 0100000000
- Exposant : $15 - 1 = 14 = 01110$

2. En partant de leur représentation binaire, effectuez la somme des réels 0.8 et 3 et donnez le résultat en binaire sur 16 bits (en utilisant l'arrondi au plus près, si nécessaire). Détaillez les opérations effectuées.

Solution:

```
0.8 = 0 01110 1001100110
3   = 0 10000 1000000000

Il faut mettre les deux nombres sous le même exposant (2^1).

0.8 = 1.1001100110 . 2^(-1) = 0.011001100110 . 2^1

  0.011001100110
+ 1.100000000000
----------------
  1.111001100110

  1.1110011010 (en arrondi au plus près)

Le résultat est normalisé, et s'écrit: 0 10000 1110011010
```

3. En partant de leur représentation binaire, effectuez le produit des réels -3 et 0.625 et donnez le résultat en binaire sur 16 bits (en utilisant l'arrondi au plus près, si nécessaire). Détaillez les opérations effectuées.

Solution:

```
-0.625 = 1 01110 0100000000
 3     = 0 10000 1000000000
Signe du résultat: négatif

Additionne les exposants : 1 + (-1) = 0 /  15 + 0 = 15 = 01111

Multiplie les mantisses:
   1.01
 * 1.1
   ----
   101
  101
  -----
  1.111000000....

Le résultat s'écrit donc: 1 01111 1110000000
```

4 Algèbre de Boole

Simplifier les fonctions suivantes en détaillant les étapes :

1. $f_1(A, B, C, D) = (A + B + C + D) + (\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D})$
2. $f_2(A, B, C, D) = A.D + A.C.D + \overline{A}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.C.D$
3. $f_3(A, B, C) = A.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$
4. $f_4(A, B, C) = A.B + A.\overline{C} + B.C$

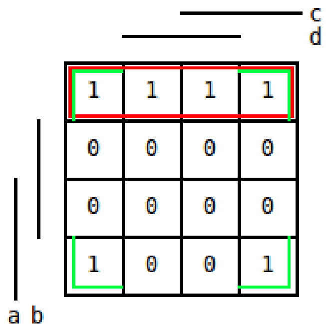
Solution:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= (A+B+C+D) + \overline{(A+B+C+D)} = 1 && (1)\\
f_2 &= D(A + AC + \overline{A}.\overline{C} + \overline{A}C\overline{B}) && (2)\\
&= D(A + \overline{A}(\overline{C} + C\overline{B}) && (3)\\
&= D((\overline{C} + \overline{B}) + A) && (4)\\
f_3 &= A(BC + \overline{B}C + B\overline{C}) && (5)\\
&= A(B(C+\overline{C}) + \overline{B}C) && (6)\\
&= A(B + \overline{B}C) && (7)\\
&= A(B + C) && (8)\\
f_4 &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{C} + BC && (9)\\
&= BC(1 + A) + A\overline{C}(B+1) && (10)\\
&= BC + A\overline{C} && (11)
\end{aligned}
$$

5 Tables de Karnaugh

(Ci dessous, on notera m les minterms et d les "don't care")

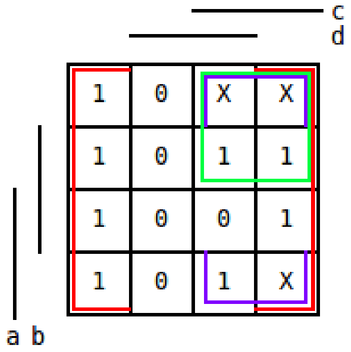
1. En utilisant une table de Karnaugh donnez une forme disjonctive (somme de produits) minimale de $f(a,b,c,d) = \Sigma m(0,1,2,3,8,10)$?



Solution: $f = \overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.\overline{d}$

2. En utilisant une table de Karnaugh donnez une forme conjonctive (produit de sommes) minimale de $g(a,b,c,d) = \Sigma m(1,5,9,13,15) + \Sigma d(2,3,10)$?

Solution: On pose $\overline{g} = \Sigma m(0,4,6,7,8,11,12,14) + \Sigma d(2,3,10)$.
$\overline{g} = \overline{d} + c.\overline{a} + c.\overline{b}$



Donc $g = d(\bar{c} + a)(\bar{c} + b)$.

3. Proposer un circuit pour la fonction f qui n'utilise que des portes NOR.

Solution:

$$f = \overline{a + b} + \overline{b + d}$$