Architecture des ordinateurs - TD 04

1 Codage excédent 127

La représentation sur 8 bits en excédent 127 consiste à encoder la valeur $x + 127$ en binaire. Par exemple pour encoder -27 on prendra $1100100_2 = 100_{10}$.

1. Quelle est la valeur minimale et maximale codable en excédent 127 sur 8 bits ?

> **Solution:** -127 et 128

2. Donner la représentation en excédent 127 des nombres suivants : 10, 23 et -40

> **Solution:** $10 = 10001001$
> $23 = 10010110$
> $-40 = 01010111$

3. Calculer $1001_{exc} + 11000011_{exc}$ en excédent 127 :
   (a) en convertissant chaque terme en décimal, puis en convertissant le résultat en excédent 127.
   (b) proposer une méthode qui ne nécessite pas le passage en décimal.

> **Solution:** $-118 + 68 = -50 = 1001101$
> $1001 + 11000011 - 1111111 = 11001100 - 01111111 = 01001101$

2 Représentation des réels

1. Donnez la plus grande et la plus petite valeur strictement positives représentables en simple précision normalisé, c'est-à-dire sur un mot de 32 bits dont 1 bit de signe, 8 bits d'exposant et 23 bits de mantisse. Même question avec un nombre dénormalisé.

> **Solution:** Minimum = 00000000100000000000000000000000, soit 2^{-126}.
> En dénormalisé : 00000000000000000000000000000001 $= 2^{-126} * 2^{-23} = 2^{-149}$
> Maximum = 01111111011111111111111111111111, soit $2^{127} * (2 - 2^{-23}) \simeq 2^{128}$

Pour simplifier, dans la suite on utilisera la représentation suivante :

Signe	Exposant	Mantisse
1 bit	4 bits	11 bits

2. Exprimez les nombres décimaux suivants (on utilisera l'arrondi par défaut si nécessaire) :
1.5
-0.125
153.75
-0.2

Solution:

$$\begin{aligned} 1.5 =& 0 \quad 0111 \quad 10000000000 \\ -0.125 =& 1 \quad 0100 \quad 00000000000 \\ 153.75 =& 0 \quad 1110 \quad 00110011100 \\ -0.2 =& 1 \quad 0100 \quad 10011001101 \text{(termine par 1 car on utilise l'arrondi au plus près)} \end{aligned}$$

3. Convertissez en décimal les nombres flottants suivants :
   0 1110 00000110010
   1 0001 00101100000
   0 0000 00100100000
   0 1111 10000000001

Solution:

(a) $131.125 = 1.0244140625 \times 2^7$

(b) $-0.018310546875 = -1.171875 \times 2^{-6}$

(c) dénormalisé : $0.002197266(0.140625 \times 2^{-6})$

(d) NaN

4. Quelle est la représentation en simple précision (sur 32 bits) des nombres suivants, exprimés en double précision (sur 64 bits) :
   4004000000000000_{16}
   $37E8000000000000_{16}$
   $C800000000000000_{16}$

Solution: $4004000000000000(= 2.5) = 40200000$ en simple
$37E8000000000000(= (1.5) * 2^{-129}) = 00180000$ en simple
$C800000000000000_{16}(= -2^{129})$ overflow, éventuellement $FF800000$ $(-\infty)$

3 Sommes de flottants

1. Effectuez les calculs suivants en utilisant la représentation des réels :
   0 0101 10111000011 + 0 0011 00011110101
   1 1101 10010001000 + 0 0110 10000000000

Solution:

```
1)
On décale la mantisse du deuxième nombre de 2:
  1.10111000011
+ 0.01000111101
---------------
 10.00000000000 * 2^-2

On renormalise 0 0110 00000000000 = 0.5

2)
On décale la mantisse du deuxième nombre de 7:
0.00000011000 - 1.10010001000 = -(1.10010001000 - 0.00000011000)
                              = - 1.10001110000
car
  1.10010001000
- 0.00000011000
---------------
  1.10001110000

Le résultat (déjà normalisé): 1 1101 10001110000 = -99.5
```

4 Multiplication de flottants

1. Effectuez les multiplications suivantes :
   0 1001 00110000000 × 0 0111 10000000000
   1 1100 00000000000 × 0 0110 01000000000

Solution:

```
1)
  Le signe du résultat est positif (0)
  L'exposant est la somme des exposants : 2 + 0 = 2
        1.0011
      * 1.1000
      --------
             0
            0
           0
      10011
     10011
     ---------
    1.11001000

  Le résultat est donc 0 1001 11001000000 = 7.125

2)
```

```
Le signe du résultat est négatif (1)
L'exposant est la somme des exposants : 5 - 1 = 4
On multiplie les mantisses:
   1.01 * 1.0 = 1.01

Le résultat est donc 0 1011 01000000000 = 20
```

2. Représentez les nombres 3 et $\frac{1}{3}$ en utilisant les arrondis au plus près, vers 0, vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Donnez ensuite les valeurs décimales correspondantes.

> **Solution:**
> - L'arrondi au plus proche arrondit à la valeur la plus proche. En cas d'égalité, on choisit la valeur paire (se terminant par 0 en binaire). C'est le mode d'arrondi par défaut.
> - L'arrondi vers 0 arrondit à la valeur la plus proche de 0 (troncature).
> - L'arrondi vers $+\infty$ arrondit à la plus proche valeur la plus grande.
> - L'arrondi vers $-\infty$ arrondit à la plus proche valeur la plus petite.
>
> $3 = 0100010000000000$ dans tous les cas $\frac{1}{3} = 0010101010101010$ en arrondi vers 0, et vers $-\infty$ (en décimal : 0.333252), 0010101010101011 au plus près et vers $+\infty$ (en décimal : 0.333374)

3. Donnez le résultat de la multiplication de ces deux nombres.

> **Solution:** On ajoute les exposants, on multiplie les mantisses, et on normalise.
>
> Au plus près et vers $+\infty$, les mantisses donnent 10.00000000000 et l'exposant deviendrait -1, on a donc 0011100000000000 (soit 1)
>
> En arrondi vers 0 et $-\infty$, les mantisses donnent 1.11111111110 et l'exposant deviendrait -1, donc 0011011111111111 (soit 0.999756)