

Architecture des ordinateurs - TD 05

1 Algèbre de Boole : simplifications

1. Démontrer les propriétés suivantes :

$$X(\bar{X} + Y) = XY \quad (1)$$

$$(X + Y)(X + Z) = X + YZ \quad (2)$$

$$XY + X\bar{Y} = X \quad (3)$$

$$(X + Y)(X + \bar{Y}) = X \quad (4)$$

$$XY + \bar{Y} = X + \bar{Y} \quad (5)$$

Solution:

$$X(\bar{X} + Y) = X\bar{X} + XY = 0 + XY$$

$$(X + Y)(X + Z) = XX + XZ + YX + YZ = X(1 + Y + Z) + YZ = X.1 + YZ$$

$$XY + X\bar{Y} = X(Y + \bar{Y}) = X.1$$

$$(X + Y)(X + \bar{Y}) = X + Y\bar{Y} \text{ (car (2))} = X + 0$$

$$X + \bar{Y} = (X + \bar{Y})(Y + \bar{Y}) = \bar{Y} + XY$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$ABC\bar{C} + \overline{ABC} \quad (6)$$

$$(AB + C\bar{D})(AB + \bar{D}E) \quad (7)$$

$$A + \bar{B}C + \bar{D}(A + \bar{B}C) \quad (8)$$

$$A\bar{B}(C + D) + \overline{(C + D)} \quad (9)$$

$$\overline{(\bar{E}F)} + AB + \overline{C\bar{D}}(EF) \quad (10)$$

$$(AB + C) + (D + EF)\overline{(AB + C)} \quad (11)$$

Solution:

$$ABC\bar{C} + \overline{ABC} = \Delta + \bar{\Delta} = 1$$

$$(AB + C\bar{D})(AB + \bar{D}E) = AB + C\bar{D}E \text{ (car (2))}$$

$$A + \bar{B}C + \bar{D}(A + \bar{B}C) = \Delta + \bar{D}\Delta = \Delta = (A + \bar{B}C)$$

$$A\bar{B}(C + D) + \overline{(C + D)} = A\bar{B} + \overline{(C + D)} \text{ car (5)}$$

$$\overline{(\bar{E}F)} + AB + \overline{C\bar{D}}(EF) = (EF)(AB + \overline{C\bar{D}})$$

$$(AB + C) + (D + EF)\overline{(AB + C)} = (AB + C) + (D + EF)$$

3. Donner le tableau de Karnaugh correspondant à la table de vérité ci-dessous. Simplifier F.

P	Q	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Solution:

		Q	
		0	1
P	0	1	1
	1	0	1

$Q + \bar{P}$

4. Donner le tableau de Karnaugh correspondant à la table de vérité ci-dessous. Simplifier F.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Solution:

		A	
		0	1
BC	00	0	1
	01	1	1
	11	0	1
	10	1	0

$$A\bar{B} + AC + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$$

2 L'assassinat de la Duchesse

Un crime exécrable a été commis au manoir : la Duchesse Alice a été assassinée. L'inspecteur de police mène son enquête. Un des occupants ment. L'inspecteur note les déclarations suivantes :

1. Bob : je n'ai pas tué la Duchesse.
2. Celine : Dimitri et Eric ont tué la Duchesse.
3. Dimitri : Céline et Eric ont tué la Duchesse.
4. Eric : Céline n'a pas tué la Duchesse.

Qui est coupable ? Construisez une table de vérité pour aider l'inspecteur.

Solution: Soit X la proposition : « X a tué la duchesse ». Soit x la proposition : « X dit la vérité ».

BCDE	b	c	d	e	un seul menteur
0000	1	0	0	1	0
0001	1	0	0	1	0
0010	1	0	0	1	0
0011	1	1	0	1	1
0100	1	0	0	0	0
0101	1	0	1	0	0
0110	1	0	0	0	0
0111	1	1	1	0	1
1000	0	0	0	1	0
1001	0	0	0	1	0
1010	0	0	0	1	0
1011	0	1	0	1	0
1100	0	0	0	0	0
1101	0	0	1	0	0
1110	0	0	0	0	0
1111	0	1	1	0	0

Il y a deux solutions :

- C,D,E ont tué la duchesse.
- D,E ont tué la duchesse.

Suspens : Céline est-elle coupable ?

3 Problème du coffre fort

Une banque s'équipe d'un nouveau coffre-fort. Le coffre-fort ne peut-être ouvert que par :

- le directeur et le sous-directeur ensemble.
- le directeur, le comptable et le fondé de pouvoir de la banque.
- le sous-directeur, le comptable et le fondé de pouvoir.

Combien faut-il installer de serrures au minimum sur ce coffre ? Comment répartir les clefs de ces serrures parmi les personnes ci-dessus ?

1. Soit D une variable booléenne valant 1 lorsque le directeur est présent pour l'ouverture du coffre et 0 dans le cas contraire. On définira de la même manière S, C, F pour les trois autres responsables de la banque. Soit une fonction $F(D, S, C, F) \rightarrow \{0, 1\}$. F vaut 1 si et seulement si le coffre doit être ouvert. Par exemple $F(0, 0, 1, 1) = 0$: le comptable et le fondé de pouvoir ne peuvent ouvrir le coffre à eux seuls.

Ecrire l'équation booléenne ou la table de vérité caractérisant la fonction F .

Solution: $F(D, S, C, F) = D.S + D.C.F + S.C.F$

2. Ecrire la fonction F sous la forme $F = \Sigma(n, m, \dots)$ où n, m, \dots est la représentation décimale des minterms.

Solution: $F(D, S, C, F) = \Sigma(7, 11, 12, 13, 14, 15)$

3. Écrire le tableau de Karnaugh de \bar{F} .
4. Trouver grâce au tableau de Karnaugh, la forme normale disjonctive minimale de \bar{F} .
5. En utilisant les lois de Morgan, trouvez la forme normale conjonctive minimale de F .
6. Combien de serrures faut-il installer ? Comment répartir les clefs parmi le personnel ?

Solution:

		CF			
		00	01	11	10
DS	00	1	1	1	1
	01	1	1	0	1
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

$$\bar{F} = \bar{D}.\bar{C} + \bar{D}.\bar{S} + \bar{F}.\bar{S} + \bar{S}.\bar{C} + \bar{D}.\bar{F}$$

$$F = (D + C).(D + S).(F + S).(S + C).(D + F)$$

Il faut donc 5 serrures :

- D reçoit les clefs 1,2,5.
- S reçoit les clefs 2,3,4
- C reçoit les clefs 1,4
- F reçoit les clefs 3,5