Architecture des ordinateurs - TD 07

1 Minterms et Maxterms

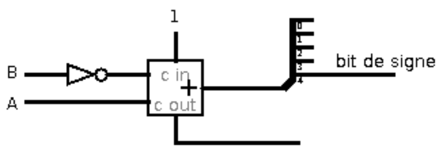
Nous considérerons la fonction logique, $XOR3(A, B, C) = A \oplus B \oplus C$, qui correspond à une porte XOR à trois entrées.

1. Donner la table de vérité de $XOR3$.
2. Écrire les minterms de $XOR3$.
   — Remarquez que la somme des minterms donne une forme disjonctive de $XOR3$.
   — Remarquez que pour chaque minterm, seule une combinaison unique (a, b, c) rends le terme vrai. On identifiera donc le minterm avec la valeur décimale correspondante au mot binaire abc_2.
3. Écrire les minterms de $\overline{XOR3}$. Donner une forme disjonctive de $\overline{XOR3}$.
4. En utilisant la loi De Morgan, donner une forme conjonctive de $XOR3$. Chaque terme de la forme conjonctive ainsi obtenue est appellé un maxterm.
5. Pour chaque maxterm, y a t'il une unique combinaison de (a, b, c) qui rends le maxterm vrai ?
6. Pour chaque maxterm, y a t'il une unique combinaison de (a, b, c) qui rends le maxterm faux ?
7. Proposez un système permettant d'identifier chaque maxterm avec une valeur décimale.

2 Circuits additioneurs (retour)

1. Soit deux nombres positifs : $A = a_3a_2a_1a_0$ et $B = b_3b_2b_1b_0$, implémenter le circuit de la fonction $C(A, B) = A < B$ **en utilisant un circuit additionneur**.

Solution: On se sert d'un additionneur 5 bits. On remarque que $A < B \equiv A - B < 0$. On peut obtenir $-B$ en CA2 avec $\overline{B} + 1$. Puis on calcule $A - B$ avec l'additionneur 5 bits et on teste le bit de signe du résultat.



3 Quine-McCluskey

1. $f(a, b, c, d) = \Sigma m(4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15)$, on donne la colonne 2^2 de la table de QMC. Donner la colonne 2^3 et retrouver ce résultat par la table de Karnaugh.

	2^2	2^3
4,5,6,7	`01--`	
4,5,12,13	`-10-`	
4,6,12,14	`-1-0`	
5,7,13,15	`-1-1`	
6,7,14,15	`-11-`	
12,13,14,15	`11--`	

Solution: On retrouve un seul implicant premier : `-1--`. L'implicant est donc essentiel et $f = b$ Sur le tableau de Karnaugh on peut ainsi regrouper tous les 1 dans un rectangle de taille 8.

2. Donner tous les implicants de la fonction $f(a, b, c) = \Sigma m(0, 1, 5, 7)$

Solution:

2^0	2^1
`000`	`00-`
`001`	`-01`
`101`	`1-1`
`111`	

On trouve trois implicants. Les implicants 1 et 3 sont essentiels.

	0	1	5	7
0,1	X	X		
1,5		X	X	
5,7			X	X

3. On considère la table des implicants ci-dessous.
   (a) Simplifiez la et déduisez en une forme disjonctive minimale.

   Solution: On peut remarquer pour la simplification que $\overline{c}d$ est inclus dans bd.

   (b) Donnez toutes les formes disjonctives minimales possibles.

   Solution:
   - $bd + \overline{a}b$
   - $bd + b\overline{c}$
   - $\overline{a}b + b\overline{c}$
   - $\overline{a}b + \overline{c}d$

	4	5	7	13
$b.d$		X	X	X
$b.\overline{c}$	X	X		X
$\overline{a}.b$	X	X	X	
$\overline{c}.d$		X		X

4. Mêmes questions pour la table des implicants ci-dessous.

	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
$\overline{b}.\overline{c}$	X	X					X	X		
$\overline{b}.\overline{d}$	X		X				X		X	
$c.\overline{d}$			X		X				X	X
$\overline{a}.\overline{c}.d$		X		X						
$\overline{a}.b.d$				X		X				
$\overline{a}.b.c$					X	X				

Solution: $\overline{b}.\overline{c} + c.\overline{d} + \overline{a}.b.d$

5. $f(a, b, c, d) = \Sigma m(4, 8, 10, 11, 12, 15) + d(9, 14)$:
   (a) Déterminer les nombres binaires correspondant aux décimaux et les répartir en groupes (en fonction du nombre de bits à 1).
   (b) Déterminer les implicants premiers de la fonction.

(c) Construire la table des implicants et déterminer les implicants premiers essentiels.

(d) Déterminer une solution minimale.

(e) Déterminer toutes les solutions minimales.

Solution: (La table ci-dessous a été générée avec l'excellent logiciel libre Bmin de J. Zelenka)

Size 1 primes			Size 2 primes		Size 4 primes	
Number of 1s	Minterm	0-cube	Minterm	1-cube	Minterm	2-cube
1	m4 m8	0100 1000	m(4,12) m(8,9) m(8,10) m(8,12)	-100* 100- 10-0 1-00	m(8,9,10,11) m(8,10,12,14)	10--* 1--0*
2	m9 m10 m12	1001 1010 1100	m(9,11) m(10,11) m(10,14) m(12,14)	10-1 101- 1-10 11-0	m(10,11,14,15)	1-1-*
3	m11 m14	1011 1110	m(11,15) m(14,15)	1-11 111-		
4	m15	1111				

Prime Implicants Table

	4	8	10	11	12	15
m(4,12)	X				X	
m(8,9,10,11)		X	X	X		
m(8,10,12,14)		X	X		X	
m(10,11,14,15)			X	X		X

Le premier et dernier implicants sont essentiels. On aboutit à deux expressions minimales possibles :

— $b.\overline{c}.\overline{d} + a\overline{d} + a.c$

— $b.\overline{c}.d + a\overline{b} + a.c$

6. Simplifier avec la méthode de QMC l'expression $f(a, b, c, d, e) = \Sigma m(0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 24, 26, 28, 30)$.

Solution:

Size 1 primes			Size 2 primes		Size 4 primes	
Number of 1s	Minterm	0-cube	Minterm	1-cube	Minterm	2-cube
0	m0	00000	m(0,2) m(0,16)	000-0 -0000	m(0,2,16,18)	-00-0*
1	m2 m16	00010 10000	m(2,3) m(2,18) m(16,18) m(16,24)	0001-* -0010 100-0 1-000	m(16,18,24,26)	1-0-0*
2	m3 m5 m9 m18 m24	00011 00101 01001 10010 11000	m(3,7) m(3,11) m(5,7) m(5,13) m(9,11) m(9,13) m(18,26) m(24,26) m(24,28)	00-11* 0-011* 001-1* 0-101* 010-1* 01-01* 1-010 110-0 11-00	m(24,26,28,30)	11--0*
3	m7 m11 m13 m14 m26 m28	00111 01011 01101 01110 11010 11100	m(14,30) m(26,30) m(28,30)	-1110* 11-10 111-0		
4	m30	11110				

Prime Implicants Table

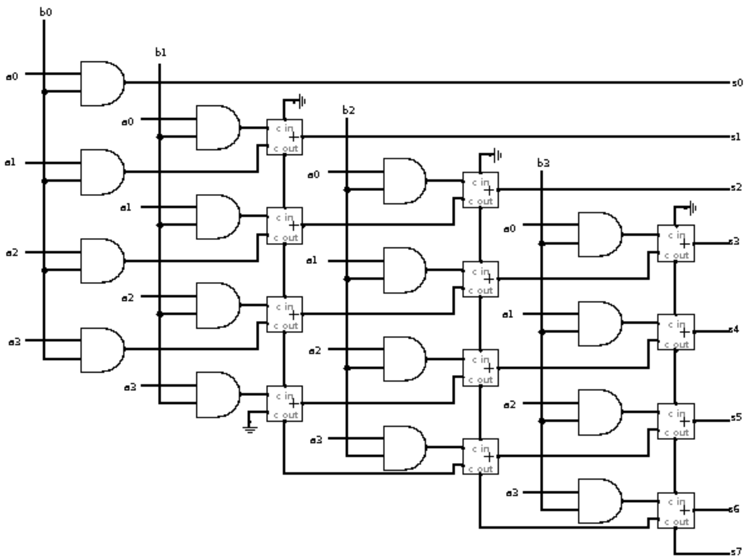
	0	2	3	5	7	9	11	13	14	16	18	24	26	28	30
m(0,2,16,18)	X	X								X	X				
m(2,3)		X	X												
m(3,7)			X		X										
m(3,11)			X				X								
m(5,7)				X	X										
m(5,13)				X				X							
m(9,11)						X	X								
m(9,13)						X		X							
m(14,30)									X						X
m(16,18,24,26)										X	X	X	X		
m(24,26,28,30)												X	X	X	X

Une solution minimale est : $\overline{E}.\overline{C}.\overline{B} + \overline{E}.D.C.B + \overline{E}.B.A + E.D.\overline{B}.\overline{A} + E.\overline{D}.\overline{C}.\overline{A} + E.\overline{C}.B.\overline{A}$.

4 Circuit Multiplieur

On souhaite réaliser un circuit multiplieur.

1. Réaliser à la main la multiplication de 1011×1100.
2. Construire un circuit qui multiplie deux nombres positifs sur 4 bits. Vous disposez d'additioneurs 4 bits.



Solution:

3. Ce schéma marche t'il pour des entrées codées en complément à 2. Si ce n'est pas le cas, comment faudrait-il le modifier ?

Solution: On veut multiplier A et B, mais cette fois ci ils peuvent être signés. On décompose le produit de la manière suivante :

$$B \times A = (-b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0) \times A$$

Ici c'est la définition de B en CA2 où le dernier bit est bit de signe. Puis par distributivité du produit :

$$B \times A = (A \times (-b_3)) \times 2^3 + (A \times b_2) \times 2^2 + ... + (A \times b_0)$$

Maintenant il suffit d'additionner les facteurs (ou produits partiels) entre eux.
Deux remarques importantes :

- Le terme $(A \times (-b_3)) \times 2^3$ peut être réécrit $(-A \times b_3) \times 2^3$. Or par définition du CA2, $-A = \overline{A} + 1$, c'est pourquoi on complémente A lorsque b3 est à 1.
- Lorsque l'on additionne des produits partiels en CA2, il faut faire attention à propager le bit de signe. Par exemple, supposons que le résultat du premier étage est 11 (-1 sur deux bits) et le résultat du deuxième étage est 100 (-4 sur trois bits). Si on additionne sans extension de signe $11 + 100 = 111$, le résultat est -1 sur 3 bits ce qui est faux. C'est pourquoi il faut étendre le bit de signe $111 + 100 = 1011$: le résultat devient $-8 + 2 + 1 = -5$, ce qui est correct.